Série 1 (Séries de Fourier)

Exercice 0.1 *Montrer que la série trigonométrique de terme général* $U_n(t) = \frac{\sin(2\pi nt)}{n^2+n+1}$ *est convergente.*

Exercice 0.2 *Soit* $r \in]0;1[$.

1. *Etudier la convergence de la série* $\sum_{n\geq 0} r^n e^{inx}$.
2. *En déduire que :* $\displaystyle\sum_{n=0}^{n=+\infty} r^n \cos(nx) = \frac{1 - r\cos(x)}{1 - 2r\cos(x) + r^2}$
   et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{n=+\infty} r^n \sin(nx) = \frac{r\sin(x)}{1 - 2r\cos(x) + r^2}$

Exercice 0.3 ***(Noyau de Dirichlet)***
Soit $n \in \mathbb{N}$ *et* $u \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. *Montrer que*

$$D_n = \frac{\sin(n + \frac{1}{2}u)}{2\sin(\frac{u}{2})} = \frac{1}{2} + \sum_{p=1}^{n} \cos(pu).$$

Exercice 0.4 ***S****oit* f *la fonction de période* 2π *définie sur* $[0; 2\pi]$ *par*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2} & si\ 0 < x < 2\pi \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

1. *Montrer que* f *est impaire, puis déterminer la série de fourier associée à* f.
2. *Est ce que que* f *est développable en série de Fourier.*
3. *En déduire la somme de la série* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 0.5 ***S****oit* f *la fonction paire de période* 2π *définie par* $f(x) = x$ *sur* $[0; \pi]$.

1. *Démontrer que la série de Fourier de* f *converge vers* f.
2. *Calculer les coefficients de Fourier de* f.
3. *En déduire la somme de la série* $\displaystyle\sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{1}{n^2}$ *ainsi que celui de la série* $\displaystyle\sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

Exercice 0.6 ***S****oit* g *la fonction impaire de période* 2π *définie par* $g(x) = x$ *sur* $[0; \pi[$ *et* $g(\pi) = 0$.

1. *Etudier la convergence de la série de Fourier de* g.
2. *Calculer les coefficients de Fourier de* g.
3. *En déduire la somme de la série* $\displaystyle\sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 0.7 ***S****oit* $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, *on considère la fonction* f *périodique de période* 2π *définie par* $f(x) = \cos(zx)$ *sur* $[-\pi, \pi]$.

1. *Calculer les coefficients de Fourier f.*
2. *Montrer que* $\cos(zx) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} + \frac{2z}{\pi}\sin(\pi z)\sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{(-1)^n}{z^2-n^2}\cos(nx)$
3. *En déduire que* $\frac{1}{\tan(\pi z)} = \frac{1}{\pi z} + \frac{2z}{\pi}\sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{1}{z^2-n^2}$.
4. *Déterminer la somme* $\sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{(-1)^n}{z^2-n^2}$.

Exercice 0.8 ***Soit*** *f la fonction paire de période 2π définie sur $]-\pi;\pi]$ par :*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & si\ -\pi < x \leq 0 \\ e^{x} & si\ 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

1. *Etudier la convergence de la série de Fourier de f (tracer le graphe de f).*
2. *Calculer les coefficients de Fourier de f.*

Exercice 0.9 ***Soit*** *g la fonction impaire de période 2π définie par $g(x) = x^2$ sur $[0;\pi[$ et $g(\pi) = 0$.*

1. *Etudier la convergence de la série de Fourier de g.*
2. *Calculer les coefficients de Fourier de g.*
3. *En déduire la somme de la série* $\sum_{n=0}^{n=+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Exercice 0.10 ***Soit*** *g la fonction de période 2π définie par $g(x) = x^2$ sur $]\pi,\pi[$.*

1. *Etudier la convergence de la série de Fourier de g. Tracer la courbe de f .*
2. *Calculer les coefficients de Fourier de g.*
3. *En déduire la somme de la série* $\sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n)^2}$.

Exercice 0.11 ***Soit*** *f la fonction de période 2π définie par $f(x) = e^x\sin(x)$ sur $[-\pi;\pi[$.*

1. *Etudier la convergence de la série de fourier associée à f.*
2. *Pour $p \in \mathbb{N}$, calculer $I_p = \int_{-\pi}^{+\pi} e^x e^{ipx}dx$.*
3. *En déduire les coefficients de Fourier de f.*
4. *Calculer la somme de la série* $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2-n^2}{n^4+4}$.

Exercice 0.12 ***Soit*** *f la fonction impaire de période 2π définie par $f(x) = x(\pi - x)$ sur $[0;\pi]$.*

1. *Déterminer la série de fourier associée à f.*
2. *Montrer que f est développable en série de Fourier.*
3. *En déduire la somme de la série* $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Exercice 0.13 ***Soit*** *g la fonction de période 2 définie sur $[-1;1[$ par*

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & si\ -1 \leq x < 0 \\ x & si\ 0 \leq x < 1 \end{cases}$$